View metadata, citation and similar papers at core.ac.uk

brought to you by CORE

provided by Kazan Federal University Digital Repository

УДК 517.518.3

О СХОДИМОСТИ ПОЧТИ ВСЮДУ ОРТОРЕКУРСИВНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ ПО СИСТЕМАМ СЖАТИЙ И СДВИГОВ

В.В. Галатенко[1], Т.П. Лукашенко[2], В.А. Садовничий[3]

1 *vgalat@imscs.msu.ru*; Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова
2 *lukashenko@mail.ru*; Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова
3 *info@rector.msu.ru*; Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

В работе рассматриваются орторекурсивные разложения по системам двоичных сжатий и сдвигов фиксированной функции. Сходимость в L^2 орторекурсивных разложений по таким системам была доказана А.Ю. Кудрявцевым и А.В. Политовым, однако вопрос о сходимости почти всюду оставался открытым. В данной работе приводится общий результат о сходимости почти всюду орторекурсивных разложений по системам двоичных сжатий и сдвигов.

Ключевые слова: орторекурсивное разложение, системы сжатий и сдвигов, сходимость почти всюду.

Орторекурсивные разложения, введенные Т.П. Лукашенко в 2000–2001 гг. [1, 2], представляют собой естественную схему разложения, обобщающую классическое разложение в ряды Фурье и входящую как составная часть в чисто жадные разложения и их обобщения [3].

Напомним определение орторекурсивных разложений. Пусть H — пространство со скалярным произведением (в данной работе рассматривается случай пространств над полем действительных чисел), $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ — система единичных элементов H, f — элемент H. Определим индуктивно последовательность остатков $\{r_n\}_{n=0}^{\infty}$ и последовательность коэффициентов $\{\hat{f}_n\}_{n=1}^{\infty}$:

$$r_0 = f;$$

$$\hat{f}_{n+1} = (r_n, e_{n+1}), \qquad r_{n+1} = r_n - \hat{f}_{n+1} e_{n+1}.$$

Определение. *Ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \hat{f}_n e_n$ *называется орторекурсивным разложением (орторекурсивным рядом Фурье) элемента* f *по системе* $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Легко заметить, что сходимость орторекурсивного разложения к разлагаемому элементу эквивалентна сходимости остатков разложения к нулю. Для орторекурсивных разложений, как и для разложений в ряды Фурье по ортонормированным системам, последовательность коэффициентов $\{\hat{f}_n\}_{n=1}^{\infty}$ принадлежит пространству ℓ^2, а равенство Парсеваля

$$\sum_{n=1}^{\infty} \hat{f}_n^2 = \|f\|^2$$

выполняется если и только если имеет место сходимость разложения к разлагаемому элементу.

Интересным случаем неортогональных систем с точки зрения орторекурсивных разложений являются системы двоичных сжатий и сдвигов фиксированной функции [4]. Определим их, положив $H = L^2[0,1]$. Пусть φ — произвольная функция, лежащая в $L^2[0,1]$ и имеющая единичную L^2-норму. Доопределим ее нулем вне отрезке $[0,1]$ и положим

$$\varphi_{k,j}(x) = \varphi_{2^k+j}(x) = 2^{\frac{k}{2}}\varphi(2^k x - j)$$

($k = 0, 1, 2\ \dots,\ j = 0, 1, \dots, 2^k - 1$). Полученная система $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, являющаяся нормированной в $L^2[0,1]$, и называется системой двоичных сжатий и сдвигов, порожденной функцией $\varphi(x)$.

А.Ю. Кудрявцевым и А.В. Политовым [5, 6] было показано, что если

$$\int_0^1 \varphi(x)\, d\mu \neq 0$$

(это условие необходимо для полноты системы $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ в $L^2[0,1]$) и дополнительно выполнено достаточно слабое условие на модуль непрерывности порождающей функции

$$\sum_{k=1}^{\infty} \omega_2^2(\varphi, 2^{-k}) < \infty$$

(где ω_2 — интегральный модуль непрерывности в L^2), то для каждого элемента $f \in L^2[0,1]$ его орторекурсивное разложение по системе $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к f по норме L^2.

Однако для функциональных пространств и, в частности, пространства L^2 при изучении разложений наряду с вопросом о сходимости по норме встает вопрос и о сходимости почти всюду. Для некоторых систем — в первую очередь, системы характеристических функций двоичных промежутков и ее обобщений — такие результаты были отмечены авторами ранее [2, 7]. Но оказывается, что сходимость почти всюду является общим свойством при орторекурсивном разложении непрерывной почти всюду функции по широкому классу систем двоичных сжатий и сдвигов. Более конкретно, имеет место следующая

Теорема. *Пусть функция $\varphi(x)$, порождающая систему двоичных сжатий и сдвигов, неотрицательна на отрезке* $[0,1]$ *и удовлетворяет условию Липшица (или условию Гёльдера с произвольным положительным показателем) на этом отрезке, а функция $f \in L^2[0,1]$ непрерывна почти всюду. Тогда орторекурсивное разложение функции $f(x)$ по системе двоичных сжатий и сдвигов $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к $f(x)$ почти всюду на отрезке* $[0,1]$.

Ключевую роль в доказательстве теоремы играет лемма, по сути связанная с рассмотрением локального (с точки зрения отрезка $[0,1]$) свойства коэффициентов разложения. Эта лемма может быть сформулирована следующим образом. Для двоично-иррациональной точки x и целого неотрицательного k через $n_k(x)$ обозначим такое натуральное число $n = 2^k + j$ ($j = 0, 1, \dots, 2^k - 1$), что

$$x \in \left[\frac{j}{2^k}, \frac{j+1}{2^k}\right].$$

Иными словами, $n_k(x)$ — это индекс двоичного отрезка k-й пачки, содержащего точку x.

Лемма. *Ряд* $\sum_{k=0}^{\infty} \hat{f}^2_{n_k(x)} 2^k$ *сходится для почти всех* $x \in [0,1]$.

Представляется, что приведенная теорема допускает дальнейшие обобщения, связанные с ослаблением условий как на порождающую функцию φ (в частности, имеется в виду отказ от требования наотрицательности, а также ослабление условия гёльдеровости), так и на разлагаемую функцию.

Работа выполнена при финансовой поддержке программы Президента “Ведущие научные школы РФ” (проект НШ–7461.2016.1).

Литература

1. Лукашенко Т. П. *Об орторекурсивных разложениях по системе Фабера–Шаудера* // Тез. докл. 10-й Саратовской зимней школы “Современные проблемы теории функций и их приложения”. – Саратов: Изд-во Саратовского ун-та, 2000. – С. 83.

2. Лукашенко Т. П. *О свойствах орторекурсивных разложений по неортогональным системам* // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. – 2001. – № 1. – С. 6–10.

3. Temlyakov V. N. *Weak greedy algorithms* // Adv. Comput. Math. – 2000. – Vol. 12. – Issue 2–3. – P. 213–227.

4. Filippov V. I., Oswald P. *Representation in L_p by series of translates and dilates of one function* // J. Approx. Theory. – 1995. – Vol. 82. – Issue 1. – P. 15–29.

5. Кудрявцев А. Ю. *Орторекурсивные разложения по системам сжатий и сдвигов фиксированной функции* // Тез. докл. Воронежской зимней математ. школы “Современные методы теории функций и смежные проблемы”. – Воронеж: ВГУ, 2001.

6. Политов В. А. *Орторекурсивные разложения в гильбертовых пространствах* // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. – 2010. – № 3. – С. 3–7.

7. Галатенко В. В. *Об орторекурсивном разложении по некоторой системе функций с ошибками при вычислении коэффициентов* // Матем. сб. – 2004. – Т. 195. – № 7. – С. 21–36.

ON CONVERGENCE ALMOST EVERYWHERE OF ORTHORECURSIVE EXPANSIONS IN SYSTEMS OF TRANSLATES AND DILATES

V.V. Galatenko, T.P. Lukashenko, A.V. Sadovnichy

We consider orthorecursive expansions in systems of dyadic translates and dilates of one function. Convergence in L^2–norm of orthorecursive expansions in such systems was established by A.Yu. Kudryavtsev and A.V. Politov, but the the results on the convergence almost everywhere were lacking. In this paper we present a general result on convergence almost everywhere of orthorecursive expansions in systems of dyadic translates and dilates.

Keywords: orthorecursive expansions, systems of translates and dilates, convergence almost everywhere.